УДК **517.9**

Г.А. ВИНОГРАДОВА

G.A.VINOGRADOVA

**ПРОБЛЕМЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ**

**THE REGULARIZATION TASK OF SINGULAR VARIATIONAL PROBLEM**

*В данной статье автор показывает, как можно сингулярную задачу, решаемую вариационным методом в весовом пространстве, заменить аппроксимирующей задачей, не имеющей сингулярности.*

*Ключевые слова: Сингулярная краевая задача, весовое пространство, вариационный метод, регуляризация.*

*In given article authors shows how a singular problem solved by the variational method in weight space can be replaced by an approximating problem that has no singularity.*

*Keywords: singular boundary value problem, weight space, variational method, regularization.*

Рассмотрим краевую задачу для сингулярного дифференциального уравнения

 , 

  , (1)

где .

 Введем весовое гильбертово пространство , которое является пополнением множества четных бесконечно дифференцируемых на отрезке  функций по норме . Скалярное произведение в нем определяется по формуле .

 Область определения оператора  состоит из множества функций дважды непрерывно дифференцируемых на интервале , непрерывных на отрезке , имеющих непрерывную производную на полуинтервале , удовлетворяющие граничным условиям  и .

 Оператор задачи  является симметричным и положительно определенным в пространстве . Как следует из вариационного метода (см., например [1]), решение задачи сводится к проблеме минимума функционала

  (2)

на энергетическом пространстве . Энергетическое пространство является пополнением  по норме . Как известно из теории ([1]), решение задачи (1) доставляет минимум функционалу (2), и функция, доставляющая минимум функционалу (2), принадлежащая области определения оператора , является решением задачи (1). Если функция, доставляющая минимум функционалу, не принадлежит , то такую функцию называют обобщенным решением задачи (1).

 Приближенное решение задачи о минимуме функционала (2) ищется в виде , где  - базисные функции в энергетическом пространстве , причем, в силу классического метода Рица,  при  по норме .

 Как это отмечалось в работах [2] и [3], в случае  приближенное решение  равномерно стремится к точному решению на отрезке .

 В случае  приближенное решение стремится к точному решению в энергетическом пространстве  и равномерно на любом отрезке , где . Граничное условие  не обязательно выполняется, даже если при решении этой задачи методом Ритца потребовать выполнение граничного условия для базисных функций, более того, в окрестности нуля приближенное решение может быть неограниченным.

 Заметим, что для функции , удовлетворяющей условию справедливо равенство , где . Кроме того,  и является бесконечно малой величиной при .

 Если функция трижды непрерывно дифференцируема на отрезке, то , где . Тогда справедлива оценка , где  на отрезке .

 Если функция четыре раза непрерывно дифференцируема на отрезке, и удовлетворяет дополнительному условию , то . В этом случае будет справедливо неравенство ,  на отрезке .

 Таким образом, оператор  аппроксимирует оператор  при определенных условиях на отрезке.

 Рассмотрим новую задачу

 , 

 ,  (3)

  ,

где .

 На области определения оператора  определим новые скалярное произведение и норму по формулам

  , . (4)

 Пополним множество по норме , полученное пространство обозначим .

 Оператор является симметричным и положительно определенным. В самом деле, используя формулу интегрирования по частям для функций  из  имеем





.

 То есть оператор является симметричным.

 Если , и , имеем . Тогда в силу неравенства Гельдера получаем  , если , и

 

,

где , если . То есть для любого  справедливо неравенство

 .

 Интегрируя последние неравенства по отрезкам  и , получаем

.

Последнее означает, что оператор является положительно определенным.

 Задача сводится к проблеме о минимуме функционала

  (5)

 и имеет единственное решение в энергетическом пространстве .

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М: Наука , 1970. – 512 c.
2. Виноградова Г.А. О решении сингулярной задачи вариационным методом // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа. – Воронеж : Издательский дом ВГУ.
3. Виноградова Г.А. О решении сингулярной задачи вариационным методом// Вестник факультета ПММ. – 2015. – Вып. 10. – С. 39-42.